تعريف

أ) إذا كانت الدالة د(س) قابلة للتكامل وكانت د(س) $\geqslant$ ۰ $\forall$ س $\in$ [أ ، ب] أو د(س) $\leqslant$ ۰ ، $\forall$ س $\in$ [أ ، ب] ، وكانت م تمثل مساحة المنطقة الواقعة بين منحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب فإن م تعطى بالعلاقة : $م = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس \right|$.

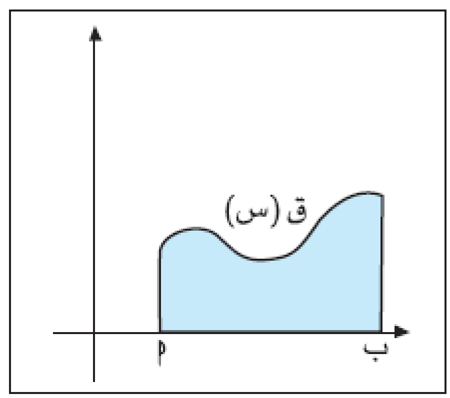
ب) إذا كانت الدالة د(س) تغير إشارتها عند س = جـ (مثلا) فتجزء التكامل حسب فترات التجزئة مثل ، $م = م_1 + م_2 = \left| \int_{أ}^{جـ} د(س) . ءس \right| + \left| \int_{جـ}^{ب} د(س) . ءس \right|$.

ملاحظة

❖ لإيجاد المساحة يفضل إيجاد أصفار الدالة حتى وإن اعطيت حدود التكامل .

❖ تتغير إشارة ق(س) في الفترة [أ ، ب] ، إذا كانت ق(س) متصلة ووجد نقطتين جـ ، هـ $\in$ [أ ، ب] وكانت إشارة ق(جـ) تختلف عن إشارة ق(هـ) .

أولاً : إيجاد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات في الفترة [أ ، ب].

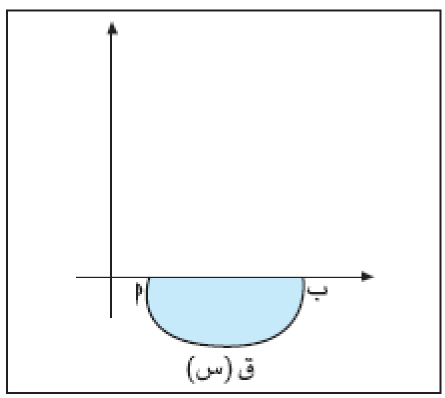


ق(س) $\geqslant$ ۰
لا تغير الدالة إشارتها في الفترة [أ ، ب]

الشكل الأول :

$المساحة = \int_{أ}^{ب} ق(س) . ءس$

$م = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس \right|$.

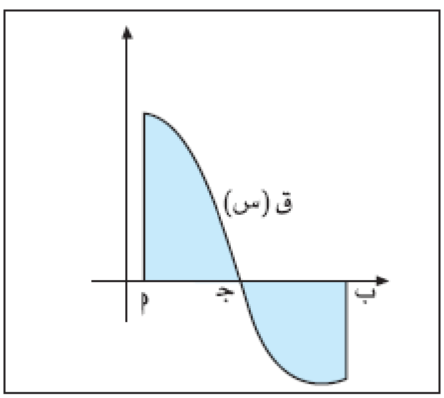


ق(س) $\leqslant$ ۰
لا تغير الدالة إشارتها في الفترة [أ ، ب]

الشكل الثاني :

$المساحة = - \int_{أ}^{ب} ق(س) . ءس$

$م = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس \right|$.



ق(س) تغير إشارتها عند س = جـ.
ق(س) $\leqslant$ ۰ في الفترة [جـ ، ب]
ق(س) $\geqslant$ ۰ في الفترة [أ ، جـ]

الشكل الثالث :

$المساحة = \int_{أ}^{جـ} ق(س) . ءس - \int_{جـ}^{ب} ق(س) . ءس$

$م = م_1 + م_2 = \left| \int_{أ}^{جـ} د(س) . ءس \right| + \left| \int_{جـ}^{ب} د(س) . ءس \right|$.

أوجد المساحة بين المنحنى $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3 - \text{س}$ وبين محور السينات .

نقاط التقاطع هي: ‎-١ ، ٠ ، ١

لا يجوز أن يكتب الطالب

$$\text{م} = \int_{-1}^{1} (\text{س}^3 - \text{س}) \cdot \text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^4}{4} - \frac{\text{س}^2}{2} \right]_{-1}^{1} = \text{صفر}$$

لكن يجب أن يكتبها:

$$\text{م} = \int_{-1}^{0} (\text{س}^3 - \text{س}) \cdot \text{ءس} + \int_{0}^{1} (\text{س}^3 - \text{س}) \cdot \text{ءس}$$

$$= \frac{1}{2}$$

إذاكان $\int_{1}^{\text{جـ}} (2\text{س}^2 + 6\text{س}) \cdot \text{ءس} = \text{صفر}$. فما قيمة جـ ؟

الحل :

$$\left[\frac{2}{3}\text{س}^3 + 3\text{س}^2 \right]_{1}^{\text{جـ}} = \text{صفر}$$

$$2 \times \frac{\text{جـ}^3 - 1}{3} + 6 \times \frac{\text{جـ}^2 - 1}{2} = 0$$

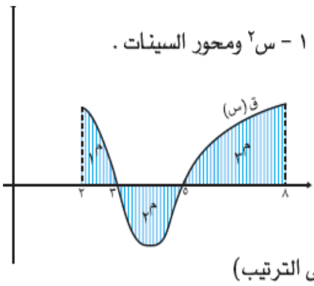
$$2\text{جـ}^3 + 9\text{جـ}^2 - 11 = 0$$

$$(\text{جـ} - 1)\,(2\text{جـ}^2 + 11\text{جـ} + 11) = 0$$

$\therefore \text{جـ} = 1$ ، $\text{جـ} = \frac{-11 \pm \sqrt{33}}{4}$ وهذه الاجابه مرفوضة

١) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = 1 - \text{س}^2$ ومحور السينات .

٢) اعتمد على الشكل المجاور لإيجاد :



أ) مساحة المنطقة (م) .

حيث $\text{م} = \text{م}_1 \cup \text{م}_2 \cup \text{م}_3$

(علمًا بأن مساحات المناطق م_1 ، م_2 ، م_3 هي ٥ ، ٧ ، ٨ على الترتيب)

ب) $\int_{2}^{8} \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ءس}$

١) أولاً نجد حدود التكامل :

$$1 - \text{س}^2 = 0 \longrightarrow \text{س}^2 = 1 \longrightarrow \text{س} = \pm 1$$

$$\therefore \text{م} = \left| \int_{-1}^{1} (1 - \text{س}^2) \cdot \text{ءس} \right| = \left[\text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3 \right]_{-1}^{1}$$

$$= \left| \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \right| = \frac{4}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

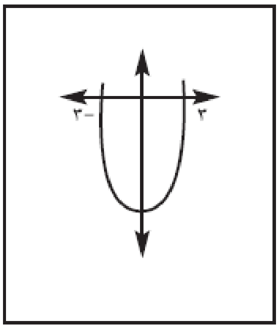
٢) أ) $\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 = 5 + 7 + 8$

$= 20$ وحدة مربعة

ب) $\int_{2}^{8} \text{ق}(\text{س})\text{ءس} = \int_{2}^{3} \text{ق}(\text{س})\text{ءس} + \int_{3}^{5} \text{ق}(\text{س})\text{ءس} + \int_{5}^{8} \text{ق}(\text{س})\text{ءس}$

$= 5 - 7 + 8 = 6$

أوجد مساحة المنطقة الواقعة بين منحنى الدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 - 9$ ومحور السينات كما بالشكل :



الحل :

$\text{س} = \pm 3$

$$\therefore \text{م} = \left| \int_{-3}^{3} (\text{س}^2 - 9) \cdot \text{ءس} \right|$$

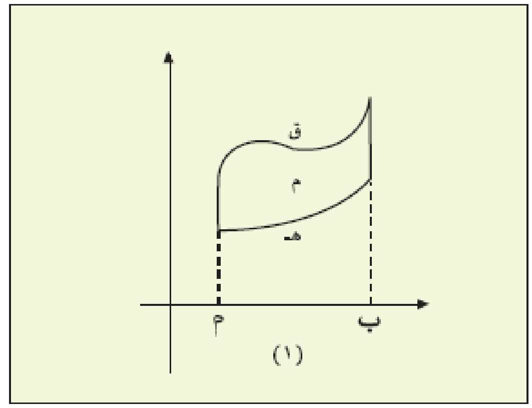
$= 36$ وحدة مربعة.

احسب مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى

$\text{ص} = 2\text{س}^2$ ومحور السينات والمستقيمات

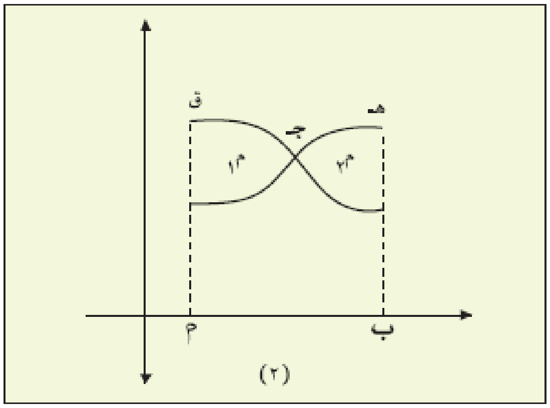
$\text{س} = 1$ ، $\text{س} = 3$

ثانيًا: إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين :



الدالة (ق − هـ) لا تغير إشارتها في [ﻫ ، ب]

$$\text{م} = \int_{\text{ﻫ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} - \text{هـ(س)})\ .\ \text{ءس}\ .$$



الدالة (ق − هـ) تغير إشارتها بين ﻫ ، ب لوجود نقطة التقاطع عند س = جـ .

$$\text{م} = \left| \int_{\text{ﻫ}}^{\text{جـ}} (\text{ق} - \text{هـ})\ .\ \text{ءس} \right| + \left| \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} (\text{ق} - \text{هـ})\ .\ \text{ءس} \right|$$

نظرية :

أ) إذا كان ق(س) − هـ(س) لا يغير من إشارته في [ﻫ ، ب] ، وكان ق(س) $\geqslant$ هـ(س) في تلك الفترة ، فإن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ق ، هـ تعطى بالقاعدة :

$$\text{م} = \int_{\text{ﻫ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} - \text{هـ(س)})\ .\ \text{ءس}\ .$$

ب) إذا تقاطع منحنى الدالتين ق ، هـ عند س = جـ بين ﻫ ، ب كما في الشكل الثاني في الصفحة أعلاه فإن:

$$\text{م} = \left| \int_{\text{ﻫ}}^{\text{جـ}} (\text{ق} - \text{هـ})\ .\ \text{ءس} \right| + \left| \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} (\text{ق} - \text{هـ})\ .\ \text{ءس} \right|$$

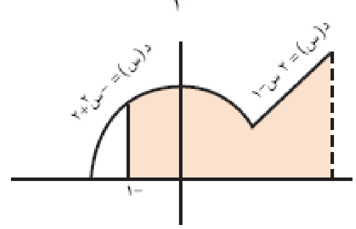
إذا كان $\text{د(س)} = \begin{cases} -\text{س}^2 + 2 & \text{، س} \leqslant 1 \\ 2\text{س} - 1 & \text{، س} > 1 \end{cases}$

فأوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى والمستقيمين .

س = −١ ، س = ٢ بالوحدات المربعة.

الحل :

$$\text{م} = \int_{-1}^{1} (-\text{س}^2 + 2)\ .\ \text{ءس} + \int_{1}^{2} (2\text{س} - 1)\ .\ \text{ءس} = \frac{16}{3}$$



أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $\text{ص}_1 = \text{س}^2$ ، $\text{ص}_2 = \sqrt{\text{س}}$.

لتعيين نقاط تقاطع المنحنيين :

$$\text{س}^2 = \sqrt{\text{س}} \Longleftarrow \text{س}^4 - \text{س} = 0$$

$$\therefore \text{س}(\text{س}^3 - 1) = 0$$

$$\Longleftarrow \text{س}(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + \text{س} + 1) = 0$$

$$\text{إما س} = 0 \text{ أو س} = 1 \Longleftarrow \text{س} = \{0 ، 1\}$$

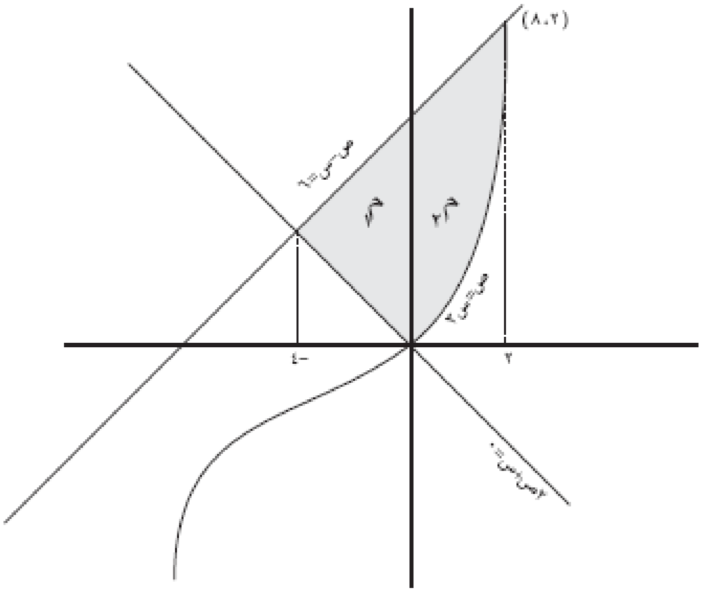
$$\therefore \text{م} = \left| \int_{0}^{1} (\sqrt{\text{س}} - \text{س}^2)\ \text{ءس} \right|$$

$$= \frac{2}{3} \text{س}^{\frac{3}{2}} - \frac{\text{س}^3}{3} \Big|_0^1 = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \text{ وحدة مساحة .}$$

أوجد المساحة المحصورة بالمنحنيات : ص−س= ٦ ،

ص = س^{٣} ، ٢ص + س = ٠



الحل :

نرسم المنحنيات المعطاة ونجد نقط تقاطعهما وهي كما بالشكل :

$م = م_{١} + م_{٢}$

$م_{١} = \int_{-٤}^{٠} \left((س+٦) - (-\frac{١}{٢}س) \right) .ءس = \int_{-٤}^{٠} (\frac{٣}{٢}س + ٦) .ءس$

$= \left[\frac{٣}{٤}س^{٢} + ٦س \right]_{-٤}^{٠} = ١٢$

$م_{٢} = \int_{٠}^{٢} \left((س+٦) - س^{٣} \right) .ءس$

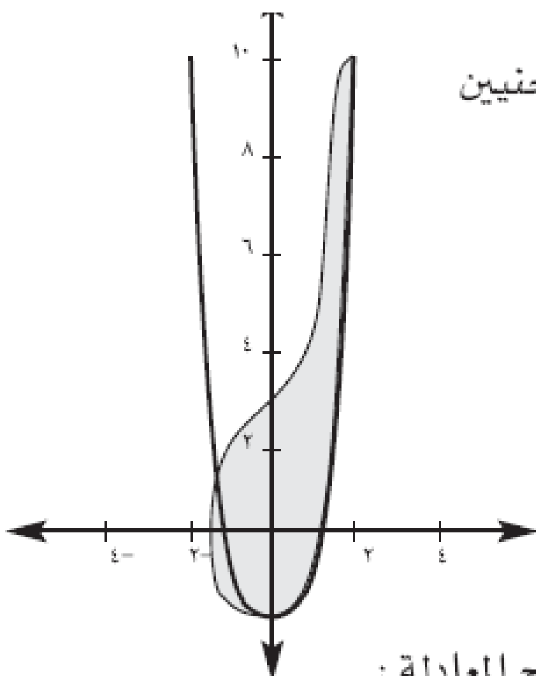
$= \left[\frac{١}{٢}س^{٢} + ٦س - \frac{١}{٤}س^{٤} \right]_{٠}^{٢}$

$= ١٠$

∴ م = ١٢+١٠ = ٢٢ وحدة مساحة.

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين

ص = س^{٣} + ٢ ، ص = ٣س^{٢} − ٢



الحل :

نوجد نقط تقاطع المنحنيين

س^{٣}+٢ = ٣س^{٢}−٢

س^{٣}− ٣س^{٢}+ ٤ = ٠ بالتجريب س = −١

∵ −١ أحد جذور المعادلة

س^{٣} −٣س^{٢} + ٤ = ٠ وبالقسمة المطلولة تنتج المعادلة :

س^{٢} −٤س + ٤ = ٠

∴ (س −٢) (س −٢) = ٠

∴ الجذور للمعدلة هي : −١ ، ٢

∴ نقط التقاطع −١ ، ٢

$م = \int_{-١}^{٢} \left((س^{٣}+٢) - (٣س^{٢}-٢) \right) .ءس = ٦\frac{٣}{٤}$ وحدة مساحة.